Жаратылыстану-математикалық бағыттағы пәндер бойынша
XVII ПРЕЗИДЕНТТІК ОЛИМПИАДА

Математикадан бірінші (өңірлік) кезеңі

ШЕШІМДЕР

1 есеп

Кесіндінің ішінде қызыл, жасыл және сары нүктелер белгіленді. Егер сіз кесіндіні тек қызыл нүктелердің бойымен кессеңіз, ол 20 бөлікке бөлінеді. Егер кесінді тек жасыл нүктелердің бойымен кесілсе, ол 24 бөлікке бөлінеді. Егер сіз кесіндіні белгіленген нүктелер бойымен кессеңіз (қызыл, жасыл және сары), онда ол 2024 бөлікке бөлінеді. Тек сары нүктелердің бойымен кесілген кесінді неше бөлікке бөлінеді?

Шешімі. Кесінді 2024 бөліктерге бөлінді, яғни $2024 - 1 = 2023$ белгіленген нүктелер болды.

(1 ұпай)

Сәйкесінше, қызыл нүктелер $20 - 1 = 19$, ал жасыл нүктелер $24 - 1 = 23$ болды.

(2 ұпай)

Бұл $2023 - 19 - 23 = 1981$ сары түсті болды дегенді білдіреді.

(1 ұпай)

Сондықтан Кесінді $1981 + 1 = 1982$ бөліктерге бөлінеді.

(1 ұпай)

Жауабы: 1982.

2 есеп

Егер $\sin\alpha + \sin\beta = \sqrt{\dfrac{5}{3}}$ және $\cos\alpha + \cos\beta = 1$ болса, $\cos(\alpha-\beta)$ мәнін табыңыз.

Шешімі. $(\cos\alpha + \cos\beta)^2 = 1$, $(\sin\alpha + \cos\beta)^2 = \dfrac{5}{3}$.

(1 ұпай)

$$(\cos\alpha+\cos\beta)^2 + (\sin\alpha+\cos\beta)^2 = \cos^2\alpha + 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta + \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta =$$
$$= \sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\beta + \cos^2\beta + 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) =$$

(2 ұпай)

$$= 1 + 1 + 2\cos(\alpha-\beta) = 2 + 2\cos(\alpha-\beta).$$

(1 ұпай)

$2 + 2\cos(\alpha-\beta) = \dfrac{8}{3} \Longrightarrow \cos(\alpha-\beta) = \dfrac{1}{3}$.

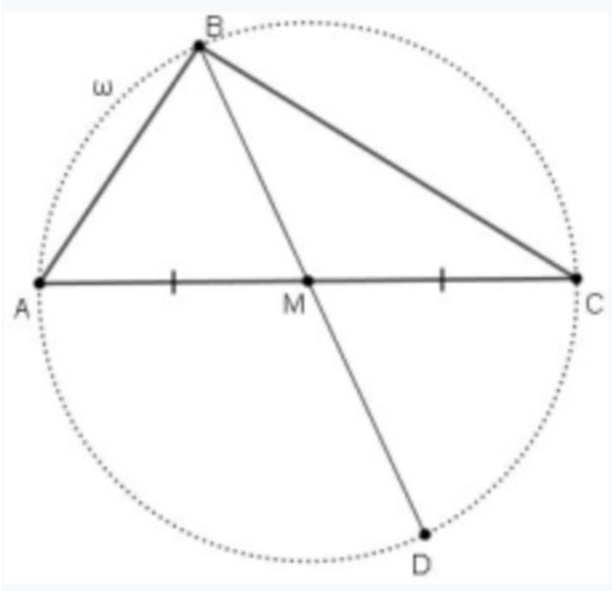
(1 ұпай)

Жауабы: $\dfrac{1}{3}$.

3 есеп

ω – ABC үшбұрышының сырттай сызылған шеңбері. BM — медиана. BM сәулесі ω-ны екінші рет D нүктесінде қияды. Егер $AB = \sqrt{65}$, $BC = \sqrt{185}$, $AC = 20$ болса, BD табыңыз.

Шешімі. $MA = MC = \dfrac{AC}{2} = 10$.



Медиана ұзындығының формуласын қолданамыз:

$$BM = \frac{1}{2}\sqrt{2AB^2 + 2BC^2 - AC^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2 \cdot 65 + 2 \cdot 185 - 400} = \frac{1}{2}\sqrt{100} = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5.$$

(2 ұпай)

$$MB \cdot MD = MA \cdot MC \Longrightarrow 5 \cdot MD = 10 \cdot 10 \Longrightarrow MD = \frac{10 \cdot 10}{5} = 20.$$

(2 ұпай)

Сондықтан $BD = BM + MD = 5 + 20 = 25$.

(1 ұпай)

Жауабы: 25.

4 есеп

$$f(x) = 4\sin x + 48 \sin x \cos x + 3\cos x + 14 \sin^2 x, \quad x \in \mathbb{R}$$

функциясының ең үлкен мәнін табыңыз

Шешімі.

$$\begin{aligned} f(x) &= 4\sin x + 48 \sin x \cos x + 3\cos x + 14 \sin^2 x = \\ &= (4 \sin x + 3\cos x) + 24 \cdot 2 \sin x \cos x + 14 \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} = \\ &= (4 \sin x + 3 \cos x) + (24 \sin 2x - 7 \cos 2x) + 7. \end{aligned}$$

(1 ұпай)

Коши-Буняковский-Шварц теңсіздігін қолданамыз:

$$4 \sin x + 3 \cos x \leq \sqrt{4^2 + 3^2} \cdot \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x} = 5;$$

$$24 \sin 2x - 7 \cos 2x \leq \leq \sqrt{24^2 + (-7)^2} \cdot \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x} = 25.$$

(2 ұпай)

Сондықтан

$$f(x) = (4 \sin x + 3 \cos x) + (24 \sin 2x - 7 \cos 2x) + 7 \leq 5 + 25 + 7 = 37.$$

(1 ұпай)

$$x=\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\Longrightarrow \sin x=\frac{4}{5}, \cos x=\frac{3}{5}\Longrightarrow$$
$$f(x)=4\sin x+48\sin x\cos x+3\cos x+14\sin^2 x=$$
$$=4\cdot\frac{4}{5}+48\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5}+3\cdot\frac{3}{5}+14\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{16}{5}+\frac{576}{25}+\frac{9}{5}+\frac{224}{25}=37.$$

Сонымен
$$\max_{x\in\mathbb{R}} f(x)=f\left(\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)=37.$$

(1 ұпай)

Жауабы: 37.

5 есеп

$S=\dfrac{1}{1!\cdot 2024!}+\dfrac{1}{2!\cdot 2023!}+\ldots+\dfrac{1}{1011!\cdot 1014!}+\dfrac{1}{1012!\cdot 1013!}$ қосындысының мәнін табыңыз.

Шешімі. Белгілі тепе-теңдікті қолданайық:
$$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^n=2^n.$$

Сонымен
$$C_{2025}^0+C_{2025}^1+C_{2025}^2+\ldots+C_{2025}^{1011}+C_{2025}^{1012}+C_{2025}^{1013}+C_{2025}^{1014}+\ldots+C_{2025}^{2023}+C_{2025}^{2024}+C_{2025}^{2025}=2^{2025},$$

$$1+\frac{2025!}{1!\cdot 2024!}+\frac{2025!}{2!\cdot 2023!}+\ldots+\frac{2025!}{1011!\cdot 1014!}+\frac{2025!}{1012!\cdot 1013!}+$$
$$+\frac{2025!}{1013!\cdot 1012!}+\frac{2025!}{1014!\cdot 1011!}+\ldots+\frac{2025!}{2023!\cdot 2!}+\frac{2025!}{2024!\cdot 1!}+1=2^{2024},$$

(2 ұпай)

$$2+2\left(\frac{2025!}{1!\cdot 2024!}+\frac{2025!}{2!\cdot 2023!}+\ldots+\frac{2025!}{1011!\cdot 1014!}+\frac{2025!}{1012!\cdot 1013!}\right)=2^{2025},$$

$$1+2025!\left(\frac{1!}{1!\cdot 2024!}+\frac{1}{2!\cdot 2023!}+\ldots+\frac{1}{1011!\cdot 1014!}+\frac{1}{1012!\cdot 1013!}\right)=2^{2024}$$

(2 ұпай)

$$\Longrightarrow 1+2025!\cdot S=2^{2024}\Longrightarrow S=\frac{2^{2024}-1}{2025!}.$$

(1 ұпай)

Жауабы: $\dfrac{2^{2024}-1}{2025!}$.

XVII ПРЕЗИДЕНТСКАЯ ОЛИМПИАДА
по предметам естественно-математического цикла

Первый (региональный) этап по математике

РЕШЕНИЯ

Задача 1

Внутри отрезка отметили красные, зелёные и жёлтые точки. Если разрезать отрезок только по красным точкам, то он распадётся на 20 кусков. Если отрезок разрезать толко по зелёным точкам, то он распадётся на 24 куска. Если разрезать по всем отмеченным точкам (красным, зелёным и жёлтым), то он распадётся на 2024 куска. На сколько кусков распадётся отрезок отрезок, если его резать только по жёлтым точкам?

Решение. Отрезок распался на 2024 куска, значит, отмеченных точек было $2024 - 1 = 2023$.

(1 балл)

Соотвественно красных точек было $20 - 1 = 19$, а зелёных было $24 - 1 = 23$.

(2 балла)

Значит, жёлтых было $2023 - 19 - 23 = 1981$.

(1 балл)

Следовательно, отрезок распадётся на $1981 + 1 = 1982$ куска.

(1 балл)

Ответ: 1982.

Задача 2

Вычислить значение $\cos(\alpha - \beta)$, если $\sin\alpha + \sin\beta = \sqrt{\dfrac{5}{3}}$ и $\cos\alpha + \cos\beta = 1$.

Решение. $(\cos\alpha + \cos\beta)^2 = 1$, $(\sin\alpha + \cos\beta)^2 = \dfrac{5}{3}$.

(1 балл)

$$(\cos\alpha + \cos\beta)^2 + (\sin\alpha + \cos\beta)^2 = \cos^2\alpha + 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta + \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta =$$
$$= \sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\beta + \cos^2\beta + 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) =$$

(2 балла)

$$= 1 + 1 + 2\cos(\alpha - \beta) = 2 + 2\cos(\alpha - \beta).$$

(1 балл)

$2 + 2\cos(\alpha - \beta) = \dfrac{8}{3} \Longrightarrow \cos(\alpha - \beta) = \dfrac{1}{3}$.

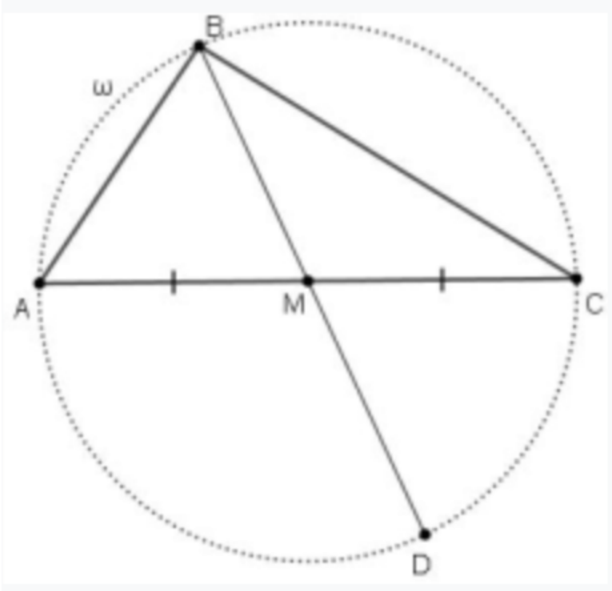
(1 балл)

Ответ: $\dfrac{1}{3}$.

Задача 3

ω – описанная окружность треугольника ABC. BM — медиана. Луч BM во второй раз пересекает ω в точке D. Вычислите BD, если $AB = \sqrt{65}$, $BC = \sqrt{185}$, $AC = 20$.

Решение. $MA = MC = \dfrac{AC}{2} = 10$.



Используем формулу длины медианы:

$$BM = \frac{1}{2}\sqrt{2AB^2 + 2BC^2 - AC^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2\cdot 65 + 2\cdot 185 - 400} = \frac{1}{2}\sqrt{100} = \frac{1}{2}\cdot 10 = 5.$$

(2 балла)

$$MB\cdot MD = MA\cdot MC \Longrightarrow 5\cdot MD = 10\cdot 10 \Longrightarrow MD = \frac{10\cdot 10}{5} = 20.$$

(2 балла)

Значит, $BD = BM + MD = 5 + 20 = 25$.

(1 балл)

Ответ: 25.

Задача 4

Найдите наибольшее значение функции

$$f(x) = 4\sin x + 48\sin x\cos x + 3\cos x + 14\sin^2 x, \quad x\in\mathbb{R}.$$

Решение.

$$\begin{aligned} f(x) &= 4\sin x + 48\sin x\cos x + 3\cos x + 14\sin^2 x = \\ &= (4\sin x + 3\cos x) + 24\cdot 2\sin x\cos x + 14\cdot\frac{1-\cos 2x}{2} = \\ &= (4\sin x + 3\cos x) + (24\sin 2x - 7\cos 2x) + 7. \end{aligned}$$

(1 балл)

Применим неравенство Коши-Буняковского-Шварца:

$$4\sin x + 3\cos x \le \sqrt{4^2+3^2}\cdot\sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x} = 5;$$

$$24\sin 2x - 7\cos 2x \le \le \sqrt{24^2 + (-7)^2}\cdot\sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x} = 25.$$

(2 балла)

Следовательно

$$f(x) = (4\sin x + 3\cos x) + (12\sin 2x - 7\cos 2x) + 7 \le 5 + 25 + 7 = 37.$$

(1 балл)

$$x = \operatorname{arctg}\frac{4}{3} \Longrightarrow \sin x = \frac{4}{5}, \cos x = \frac{3}{5} \Longrightarrow$$
$$f(x) = 4\sin x + 48\sin x\cos x + 3\cos x + 14\sin^2 x =$$
$$= 4\cdot\frac{4}{5} + 48\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5} + 3\cdot\frac{3}{5} + 14\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{5} + \frac{576}{25} + \frac{9}{5} + \frac{224}{25} = 37.$$

Значит,

$$\max_{x\in\mathbb{R}} f(x) = f\left(\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right) = 37.$$

(1 балл)

Ответ: 37.

Задача 5

Вычислите значение суммы $S = \dfrac{1}{1!\cdot 2024!} + \dfrac{1}{2!\cdot 2023!} + \ldots + \dfrac{1}{1011!\cdot 1014!} + \dfrac{1}{1012!\cdot 1013!}$.

Решение. Применим известное тождество:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n.$$

Значит,

$$C_{2025}^0 + C_{2025}^1 + C_{2025}^2 + \ldots + C_{2025}^{1011} + C_{2025}^{1012} + C_{2025}^{1013} + C_{2025}^{1014} + \ldots + C_{2025}^{2023} + C_{2025}^{2024} + C_{2025}^{2025} = 2^{2025},$$

$$1 + \frac{2025!}{1!\cdot 2024!} + \frac{2025!}{2!\cdot 2023!} + \ldots + \frac{2025!}{1011!\cdot 1014!} + \frac{2025!}{1012!\cdot 1013!} +$$
$$+ \frac{2025!}{1013!\cdot 1012!} + \frac{2025!}{1014!\cdot 1011!} + \ldots + \frac{2025!}{2023!\cdot 2!} + \frac{2025!}{2024!\cdot 1!} + 1 = 2^{2024},$$

(2 балла)

$$2 + 2\left(\frac{2025!}{1!\cdot 2024!} + \frac{2025!}{2!\cdot 2023!} + \ldots + \frac{2025!}{1011!\cdot 1014!} + \frac{2025!}{1012!\cdot 1013!}\right) = 2^{2025},$$

$$1 + 2025!\left(\frac{1!}{1!\cdot 2024!} + \frac{1}{2!\cdot 2023!} + \ldots + \frac{1}{1011!\cdot 1014!} + \frac{1}{1012!\cdot 1013!}\right) = 2^{2024}$$

(2 балла)

$$\Longrightarrow 1 + 2025!\cdot S = 2^{2024} \Longrightarrow S = \frac{2^{2024}-1}{2025!}.$$

(1 балл)

Ответ: $\dfrac{2^{2024}-1}{2025!}$.